

Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Донецкий государственный университет»

Факультет математики и информационных технологий
Кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений

УТВЕРЖДАЮ
проректор

_____ П. А. Машаров
«17» апреля 2025 г.
МП

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

ТЕОРИЯ МЕРЫ И ИНТЕГРАЛА

Укрупненная группа направлений подготовки	01.00.00 Математика и механика
Программа высшего образования	Программа бакалавриата
Направление подготовки	01.03.01 Математика
Направленность (профиль) образовательной программы	Математика
Квалификация	Бакалавр
Форма обучения	Очная

Рабочая программа может быть адаптирована для лиц
с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов

Донецк 2025

Рабочая программа дисциплины **«Теории меры и интеграла»** для обучающихся по направлению подготовки 01.03.01 Математика (Профиль: Математика), составлена на основании Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования – бакалавриат по направлению подготовки 01.03.01 Математика, утвержденного приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 10 января 2018 г. № 8 (с изм. и доп.), Порядка организации и осуществления образовательной деятельности по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета, программам магистратуры, утвержденного приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации от 06 апреля 2021 г. № 245 (с изм. и доп.), в соответствии с учебным планом, утвержденным Ученым советом ФГБОУ ВО «ДонГУ» для набора 2025 года.

Разработчик:

профессор кафедры математического анализа и
дифференциальных уравнений,
д-р физ.-мат. наук, доцент

В.П. Заставный

Рабочая программа одобрена на заседании кафедры математического анализа и
дифференциальных уравнений.
Протокол от 08.04.2025 г. № 9а

Заведующий кафедрой

В. В. Волчков

СОГЛАСОВАНО:

Декан факультета математики и
информационных технологий
16.04.2025 г.

И. А. Моисеенко

Учебно-методическая комиссия факультета математики и информационных технологий.
Протокол от 16.04.2025 г. № 3.
Председатель

Л. И. Селякова

Руководитель основной образовательной
программы, д-р физ.-мат. наук, проф.
16.04.2025 г.

В. В. Волчков

1. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

1.1. Требования к предварительной подготовке обучающихся, предшествующие и сопутствующие дисциплины, на которых основывается изучение данной:

базовая подготовка по математике в объёме программы средней школы; дисциплины программы бакалавриата: Математический анализ, Алгебра, Топология.

1.2. Дисциплины, курсовые работы и практики, для которых освоение данной дисциплины необходимо как предшествующее:

Функциональный анализ, Теория вероятностей и математическая статистика, Гармонический анализ, Геометрия масс, Производственная практика: научно-исследовательская работа (обязательная), Производственная практика: преддипломная практика (обязательная).

2. ОПИСАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

2.1. Общая характеристика

Наименование показателя	Значение показателя
Название образовательной программы (далее – ОП)	01.03.01 Математика (Профиль: Математика)
Шифр и название в соответствии с учебным планом	Б1.Б.30. Теория меры и интеграла
Часть образовательной программы	Базовая часть
Количество зачетных единиц / всего часов	3,5 / 126

В случае предъявления от обучающегося или его родителя (законного представителя) заявления на обучение по адаптированной образовательной программе высшего образования, подкрепленного заключением психолого-медико-педагогической комиссии (ПМПК) или медико-социальной экспертизы (МСЭ) с рекомендациями создания индивидуальной программы реабилитации и абилитации (ИПРА), данная рабочая программа может быть адаптирована с учетом индивидуальных особенностей здоровья обучающегося.

2.2. Распределение часов по формам и периодам обучения

Форма обучения	курс	семестр	Общее количество часов					Форма контроля
			лекционных	лабораторных	практических	самостоятельной работы + контроль	всего	
Очная	3	5	34	0	34	58	126	экзамен
Очная, всего			34	0	34	58	126	

3. ЦЕЛИ ДИСЦИПЛИНЫ

Овладение теоретическими положениями и некоторыми применениями теории меры и интеграла Лебега; знакомство с пространствами интегрируемых функций; получение теоретической базы для применения интеграла Лебега в других математических теориях; развитие навыков логического и аналитического мышления и подготовка к профессиональной деятельности.

4. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ КОМПОНЕНТА ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ, ИХ ИНДИКАТОРЫ И ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ

4.1. Компетенции

ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности

4.2. Индикаторы компетенций

ОПК-1.3. Демонстрирует навыки выполнения стандартных действий, решения типовых задач с учетом основных понятий и общих закономерностей, формулируемых в рамках базовых математических и естественнонаучных дисциплин

4.3. Результаты обучения

ОПК-1.3.1. Знает классы множеств, свойства меры и внешней меры.

ОПК-1.3.2. Знает общую теорию построение меры и интеграла Лебега, общие свойства функций, интегрируемых по Лебегу.

ОПК-1.3.3. Умеет вычислять интегралы Лебега и Лебега-Стилтьеса, осуществлять предельный переход под знаком интеграла Лебега, находить вариацию функции, исследовать функциональную последовательность на сходимость почти всюду и по мере.

5. ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Название темы	Краткое содержание темы (вопросы темы)
Раздел 1. Мера	<p>1.1. Операции над множествами (пересечение, объединение, разность, дополнение, верхний и нижний пределы). Классы множеств.</p> <p>1.2. Общее понятие меры и её свойства (монотонность, субаддитивность, счетная полуаддитивность, непрерывность снизу и сверху). Классы мер.</p> <p>1.3. Построение меры (внешняя мера; внешняя мера, индуцированная функцией множеств; теорема Каратеодори).</p> <p>1.4. Определения полукольца и предмеры. Теорема о продолжении предмеры до меры.</p> <p>1.5. Мера Лебега-Стилтьеса на прямой. Мера Лебега на прямой и в \mathbf{R}^n.</p>
Раздел 2. Измеримые функции	<p>2.1. Измеримые отображения и функции. Критерий измеримого отображения. Критерий измеримой функции. Измеримость суперпозиции.</p> <p>2.2. Свойства измеримых функций.</p> <p>2.3. Эквивалентные функции. Сходимость почти всюду и по мере. Теоремы Егорова, Лебега, Ф.Рисса.</p> <p>2.4. Критерий измеримости в терминах простых функций.</p>
Раздел 3. Интеграл	<p>3.1. Интеграл Лебега от неотрицательной, измеримой, простой функции и его свойства. Два определения интеграла Лебега от неотрицательной, измеримой функции и их эквивалентность. Определение интеграла Лебега в общем случае.</p> <p>3.2. Свойства интеграла Лебега.</p> <p>3.3. Основные теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Лебега (о монотонной последовательности, Фату, Лебега).</p> <p>3.4. Сравнение интегралов Римана и Лебега.</p>

	3.5. Пространства L_p (неравенства Гёльдера и Минковского, линейность, полнота, всюду плотные множества, соотношения между классами L_p при разных p). 3.6. Связь между разными типами сходимости в L_p .
Раздел 4. Классы функций	4.1. Функции ограниченной вариации и их свойства. Теорема Жордана. 4.2. Абсолютная непрерывность интеграла Лебега. Абсолютно непрерывные функции и их свойства. 4.3. Теоремы Лебега о дифференцируемости почти всюду монотонной функции и интеграла с переменным верхним пределом интегрирования. Описание классов $AC[a,b]$ и $Lip\ 1$. Сингулярные функции.

6. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

6.1. Форма обучения – очная, курс – 3, семестр – 5

Наименования разделов и тем	Количество часов				
	Лекц.	Лабор.	Практ.	СРС+К	Всего
Раздел 1. Мера	10		10	15	35
Раздел 2. Измеримые функции	8		8	12	28
Раздел 3. Интеграл	10		10	18	38
Раздел 4. Классы функций	6		6	13	25
ИТОГО ЗА СЕМЕСТР / ЗА КУРС					
ИТОГО ПО КОМПОНЕНТУ ОП	34	–	34	58	126

7. ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ (СРЕДСТВА) ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ, ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

7.1. Контрольные вопросы

- Операции над множествами (пересечение, объединение, разность, дополнение, верхний и нижний пределы). Классы множеств.
- Общее понятие меры и её свойства (монотонность, субтрактивность, счетная полуаддитивность, непрерывность снизу и сверху). Классы мер. Классы мер.
- Построение меры (внешняя мера; внешняя мера, индуцированная функцией множеств; теорема Каратеодори).
- Определения полукольца и предмеры. Теорема о продолжении предмеры до меры.
- Мера Лебега-Стилтьеса на прямой. Мера Лебега на прямой и в \mathbf{R}^m .
- Измеримые отображения и функции. Критерий измеримого отображения. Критерий измеримой функции. Измеримость суперпозиции.
- Свойства измеримых функций.
- Эквивалентные функции. Сходимость почти всюду и по мере. Теоремы Егорова, Лебега, Ф.Рисса.
- Критерий измеримости в терминах простых функций.
- Интеграл Лебега от неотрицательной, измеримой, простой функции и его свойства. Два определения интеграла Лебега от неотрицательной, измеримой функции и их эквивалентность. Определение интеграла Лебега в общем случае.
- Свойства интеграла Лебега.

12. Основные теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Лебега (о монотонной последовательности, Фату, Лебега).
13. Сравнение интегралов Римана и Лебега.
14. Пространства L_p (неравенства Гёльдера и Минковского, линейность, полнота, всюду плотные множества, соотношения между классами L_p при разных p).
15. Связь между разными типами сходимости в L_p .
16. Функции ограниченной вариации и их свойства. Теорема Жордана.
17. Абсолютная непрерывность интеграла Лебега. Абсолютно непрерывные функции и их свойства.
18. Теоремы Лебега о дифференцируемости почти всюду монотонной функции и интеграла с переменным верхним пределом интегрирования. Описание классов $AC[a,b]$ и $Lip\ 1$. Сингулярные функции.

7.2. Темы письменных работ (типы задач)

Контрольные работы по практике и темам:

- верхний и нижний пределы последовательности множеств;
- мера Лебега-Стилтьеса;
- мера Лебега;
- сходимость почти всюду и по мере Лебега;
- интеграл Лебега;
- предел интегралов Лебега;
- вариация функции на заданном отрезке.

Контрольная работа по проверке теоретических знаний – по всем темам, с использованием указанных выше контрольных вопросов.

7.3. Образец содержания экзаменационного билета

1. Построение меры (внешняя мера; внешняя мера, индуцированная функцией множеств; λ^* -измеримые множества, теорема Каратеодори).
2. Связь между разными типами сходимости в L_p .
3. Найти интеграл Лебега $\int [x^{3/2}] d\lambda(x)$ по отрезку $[0,4]$.
4. Найти вариацию функции $f(x) = |\ln x|$ на отрезке $[1/e; e]$.

В случае ведения учебного процесса с использованием электронного обучения и дистанционных образовательных технологий, содержание билета может отличаться от приведенного.

8. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ БАЛЛОВ, КОТОРЫЕ ПОЛУЧАЮТ ОБУЧАЮЩИЕСЯ

Общая оценка знаний обучающихся по дисциплине проводится по 100-балльной шкале исходя из максимума, приведенного в таблице ниже.

Организационно-учебная работа в аудитории оценивается на основе таких критериев как посещаемость занятий, своевременное и качественное выполнение домашних заданий, активность во время проведения лекционных и практических занятий (участие в обсуждении текущего и пройденного материала, решение задач и т.п.).

Самостоятельная работа оценивается на основе предоставленных на проверку выполненных домашних, индивидуальных заданий с учетом своевременности их предоставления и соответствия требованиям к их выполнению.

Количество баллов за контрольную работу вычисляется как сумма баллов за все входящие в её состав задания. Каждое задание оценивается исходя из максимально возможного количества баллов с учетом правильности выполнения задания, полноты приводимых обоснований.

По результатам работы в семестре обучающийся, набравший не менее 60 баллов, имеет право получить оценку. Те, кто претендует на более высокий балл, проходят промежуточную аттестацию. Максимальное количество баллов на промежуточной аттестации – 100. Общее количество баллов за семестр вычисляется как максимальная из полученных за семестр и на промежуточной аттестации и выставляется согласно принятому порядку.

8.1. Семестр 5

Номера разделов	Виды работ	Максимальное количество баллов
1-4	Организационно-учебная работа в аудитории	15
	Самостоятельная работа	10
	Контрольные работы по практике	25
	Контрольная работа по теоретическому материалу	50
ИТОГО		100
Экзамен		100
Общий итог за семестр		100

Соответствие баллов оценке

Количество баллов из 100	ECTS	Оценка по пятибалльной шкале	
		Экзамен, дифференцированный зачет	Зачет
90-100	A	отлично	зачтено
80-89	B	хорошо	зачтено
75-79	C		зачтено
70-74	D	удовлетворительно	зачтено
60-69	E		зачтено
35-59	FX	неудовлетворительно	не зачтено
0-34	F		не зачтено

9. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ УЧЕБНОГО ПРОЦЕССА

Учебные занятия проводятся в Главном корпусе ДонГУ (г. Донецк, пр. Гурова, 6). Для проведения занятий требуется аудитория, оборудованная меловой или маркерной доской, мультимедийный проектор и экран, ноутбук, комплект учебной мебели для студентов, рабочее место преподавателя, выход в Интернет – проводной или с использованием Wi-Fi.

Для самостоятельной работы используются текстовые и электронные ресурсы Научной библиотеки университета и других электронных библиотечных баз данных, учебно-методическое обеспечение, представленное в учебно-методическом кабинете Главного корпуса (ауд.405).

Обучающиеся имеют возможность использовать учебные материалы по дисциплине, размещенные на платформе Moodle Центра дистанционного образования ФГБОУ ВО «ДонГУ». При изучении дисциплины могут применяться электронное обучение и дистанционные образовательные технологии.

С использованием ресурсов платформы дистанционного образования осуществляется текущий контроль знаний обучающихся на основе тестирования и проверки результатов самостоятельной работы.

10. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

10.1. Основная литература

1. Дороговцев А.Я. Элементы общей теории меры и интеграла, К.: Вищ. Шк. 1989. – 152 с.
2. Радбель Н.И. Теория меры и интеграла, (методическое пособие), Донецк, ДонНУ, 2006, 39 с.
3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В., Элементы теории функций и функционального анализа, М.: Наука. 1981. – 543 с.

10.2. Дополнительная литература

4. Городецкий В.В., Нагнибида Н.И., Настасиев П.П., Методы решения задач по функциональному анализу. К.: Вища Школа, 1990. – 479 с.
5. Гихман И. И. Введение в общую теорию меры и интеграла. К., Донецк: «Вища школа», 1971 – 172с.
6. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. - М.: ГИТЛ, 1974. – 480с.
7. Лиманский Д.В. Дополнительные главы анализа: учебное пособие / Д.В. Лиманский, П.А Машаров – Донецк: ДонГУ, 2024. – 125 с

11. ИНФОРМАЦИОННЫЕ РЕСУРСЫ

1. **Национальная электронная библиотека (НЭБ):** федеральная государственная информационная система / Министерство Культуры РФ; Российская государственная библиотека. – Москва, 2019- . – URL: <https://rusneb.ru/> (дата обращения: 31.03.2025). – Режим доступа: свободный, подписка. Необходима установка программного обеспечения. – Текст: электронный.
2. **eLIBRARY.RU:** научная электронная библиотека: сайт. – Москва, 2000- . – URL: <https://elibrary.ru> (дата обращения: 31.03.2025). – Режим доступа: для авторизов. пользователей. –Текст: электронный.
3. Научная электронная библиотека **«КиберЛенинка»:** сайт / Ассоциация «Открытая наука». – Москва, 2014- . – URL: <https://cyberleninka.ru/> (дата обращения: 31.03.2025). – Режим доступа: свободный. – Текст: электронный.
4. Электронно-библиотечная система **«Лань»:** [сайт]. – URL: <https://e.lanbook.com> (дата обращения: 31.03.2025). – Режим доступа: издания Сетевой электронной библиотеки, для авторизов. пользователей. – Текст: электронный.
5. **ЭБС Юрайт:** электронная библиотечная система: сайт. – Москва, 2013. – URL: <https://urait.ru/library/svobodnyy-dostup/> (дата обращения: 31.03.2025). – Режим доступа: издания свободного доступа, для авторизов. пользователей. – Текст: электронный.
6. **Электронно-библиотечная система ДонГУ:** сайт / ФГБОУ ВО «ДонГУ». – Донецк, 2016- . – URL: <http://library.donnu.ru/> (дата обращения: 31.03.2025). – Режим доступа: свободный. – Текст: электронный.
7. **Электронный каталог** Научной библиотеки ДонГУ: раздел сайта / НБ ДонГУ. – Текст: электронный // ЭБС ДонГУ: сайт. – URL: <http://library.donnu.ru/catalog/> (дата обращения: 31.03.2025). – Режим доступа: поиск свободный, электронные документы – для пользователей ДонГУ.

8. **Электронный архив ДонГУ**: раздел сайта / НБ ДонГУ. – Текст: электронный // ЭБС ДонГУ: сайт. – URL: <http://repo.donnu.ru/> (дата обращения: 31.03.2025). – Режим доступа: свободный.

12. ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

1. Windows 7 PRO (корпоративная лицензия ДонГУ № 46484614)
2. Microsoft Office (корпоративная лицензия ДонГУ № 46472919)
3. Microsoft Visual Studio (лицензия программы Dream Spark для высших учебных заведений)
4. Антивирус Касперского, Adobe Acrobat Reader, xPDF (лицензии GPL, Apache, BSD для свободного программного обеспечения).